© «Вестник ИГЭУ» Вып. 4 2007 г.

УДК 681.3

АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК РЕГУЛИРУЮЩИХ ОРГАНОВ НЕЛИНЕЙНЫМИ ПО ПАРАМЕТРАМ МОДЕЛЯМИ

АГАФОНОВА Н.А., канд. техн. наук, МАРШАЛОВ Е.Д., инж., НАУМОВ Ю.В., асп.

Предлагается алгоритм аппроксимации полученных оценок функциями, нелинейными по параметрам, реализованный в виде программы и рассмотренный на примере задачи получения математической модели пропускной характеристики направляющего аппарата дутьевого вентилятора ВДН-20 подачи общего воздуха в топку котла БКЗ-320-140-ГМ-8.

Ключевые слова: алгоритм аппроксимации, пропускная характеристика, математическая модель.

REGULATORY BODY CHARACTERISTIC APPROXIMATION WITH NON-LINEAR MODELS

N.A. AGAFONOVA, Ph.D., E.D. MARSHALOV, engineer, Yu.V. NAUMOV, postgraduate

The work represents approximation algorithm of evaluations obtained with functions, which are non-linear according to their parameters. The algorithm was realized as a program and analyzed by means of the example of mathematical model obtaining of BFD-20 blow fan distributor capacity of air supply into BKZ-320-140-GM-8 boiler furnace.

Key words: approximation algorithm, carrying capacity, mathematical model.

Введение. Постановка задачи. При расчете автоматических систем управления зачастую пренебрегают регулировочными характеристиками регулирующих органов, которые оказывают немаловажное влияние на качество работы системы. Это ведет к существенному расхождению показателей качества работы реальных систем и расчетных. Проблема осложняется тем, что регулировочные характеристики реальных регулирующих органов имеют индивидуальные формы, которые трудно описать математическими зависимостями. Поэтому актуальной является задача подбора аналитических выражений и создание программных продуктов, позволяющих получать математические модели регулировочных характеристик конкретных регулирующих органов.

Целью данной работы является получение математической модели оценок регулировочных характеристик регулирующих органов непрерывных технологических объектов по имеющимся заводским данным. Предлагаемый ниже алгоритм аппроксимации полученных оценок функциями, нелинейными по параметрам, реализован в виде программы и рассматривается на примере задачи получения математической модели пропускной характеристики направляющего аппарата дутьевого вентилятора ВДН-20 подачи общего воздуха в топку котла БКЗ-320-140-ГМ-8.

По исходной пропускной характеристике направляющего аппарата дутьевого вентилятора был получен массив точек, содержащий углы поворота направляющего аппарата и соответствующие им значения пропускной способности регулирующего органа. Весь диапазон поворота направляющего аппарата дутьевого вентилятора нормирован, т.е. приведен к 100 % шкале (рис. 1).

Ставится задача аппроксимации экспериментально полученной оценки регулировочной характеристики гладкой возрастающей функцией, имеющей одну точку перегиба.

Проблема сглаживания и нелинейная аппроксимация экспериментальных данных. Если необходимо увидеть динамику полезного сигнала, полученного экспериментально в виде ряда наблюдений, применяют самый простой прием – сглаживание данных. Нахождение сглаживающей функции можно осуществить различными способами: вручную; с помощью линейного фильтра «скользящее среднее» по трем (пяти, семи и т.д.) точкам; с помощью линейного фильтра «скользящее среднее» по трем (пяти, семи и т.д.) точкам с весовыми коэффициентами. Однако все вышеперечисленные методы обладают существенными недостатками: если сглаживание проводится по малому числу точек, эффект сглаживания слабый; если число точек велико – форма сигнала становится невыразительной; если на выходе имеем ломаную линию, которая не является гладкой функцией, вопрос подбора аналитического выражения для нее остается открытым.

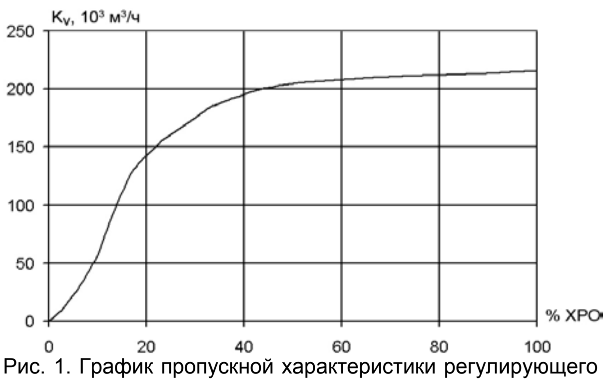

Рис. 1. График пропускной характеристики регулирующего органа

Существует несколько методов для аппроксимации данных. Большинство из них сводится к решению систем линейных уравнений, что обеспечивает простоту реализации алгоритма. Используя метод наименьших квадратов (МНК), можно построить практически любые формы нелинейной парной связи переменных. Для этого обычно используют линеаризующие преобразования [2].

Для простоты реализации и уменьшения времени расчета обычно в качестве аппроксимирующей функции $\bar{f}(x)$ берется сумма некоторых функций с неопределенными коэффициентами:

$$\bar{f}(x) = a_k\varphi_k(x) + a_{k-1}\varphi_{k-1}(x) + \ldots + a_1\varphi_1(x) + \\ + a_0\varphi_0(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j\varphi_j(x), \quad (1)$$

где функции $\varphi_j(x)$ составляют линейно независимую полную систему.

Чаще всего в качестве функций $\varphi_j(x)$ берутся либо степенные функции 1, x^2, x^3,…, либо тригонометрические функции, либо экспоненты. Функции $\varphi_j(x)$ могут быть нелинейными, что существенно расширяет возможности аппроксимации. Возможность выполнения линейной регрессии общего вида (1) реализована в системе компьютерной математики Mathcad [3].

Однако и такой подход имеет ряд существенных недостатков: трудно заранее сказать, какое число функций $\varphi_j(x)$ потребуется для аппроксимации данного множества точек; трудно заранее определить, какие функции брать в качестве $\varphi_j(x)$, так как одна система функций может лучше приближать данное множество точек, а другая хуже; никак нельзя учесть условия, налагаемые на аппроксимирующую функцию.

Реализация идеи по отысканию оптимальной формы связи при большом числе исходных данных теоретически возможна, но практически, даже с применением мощных ЭВМ, требует такого количества времени, что выполнение задачи становится затруднительным.

Если облако точек имеет определенную и интерпретируемую форму, для аппроксимации можно использовать любую функцию, нелинейную по параметрам. В системе Mathcad есть возможность получения нелинейной регрессии в виде нахождения вектора параметров k_i произвольной функции $F(x, k_1, k_2,\ldots, k_n)$, при котором обеспечивается минимальная среднеквадратическая погрешность приближения облака исходных точек [3].

Однако и здесь при практическом решении конкретной задачи возникает ряд проблем: необходимо задать вектор, содержащий аналитические выражения для исходной аппроксимирующей функции и ее производных по всем параметрам; необходимо задать вектор начальных значений параметров k_i, что не всегда является очевидным; кроме того, все численные методы решения нелинейных систем сильно зависят от начального приближения.

С точки зрения компьютерной реализации решение систем нелинейных уравнений тождественно поиску безусловного минимума нелинейной функции. Для этого был исследован общий случай метода Ньютона поиска минимума функции. Данный метод был модифицирован, и на его основе создана программа, позволяющая сглаживать исходные данные и получать аналитическую формулу аппроксимирующей нелинейной по параметрам функции, удовлетворяющей заданным условиям, которая может быть использована для дальнейших исследований.

Решение задачи аппроксимации оценки регулировочной характеристики. Пусть модель регулировочной характеристики имеет вид $F(x) = \bar{f}(x) + \lambda(x)$, где $\lambda(x)$ – случайная составляющая ошибки, имеющая нормальное распределение, $M[\lambda] = 0$ и $D[\lambda] = \sigma^2$.

При постановке задачи к аппроксимирующей функции $\bar{f}(x)$ были предъявлены следующие требования:

1) $\bar{f}(x)$ является гладкой, то есть дифференцируемой в каждой точке;

2) $\bar{f}(x)$ монотонно возрастает;

3) $\bar{f}(x)$ имеет одну точку перегиба.

Существует ряд гладких функций, называемых функциями роста, которые удовлетворяют этим условиям.

Рассмотрим метод нелинейной аппроксимации на примере функции вида

$$\bar{f}(x) = a_0\operatorname{arctg}\left(a_1\left(x - a_2\right)\right) + a_3. \quad (2)$$

Составим функцию невязки

$$Q(a) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{f}(x_i)\right)^2 = \\ = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \left(a_0\operatorname{arctg}(a_1(x_i - a_2)) + a_3\right)\right)^2. \quad (3)$$

Частные производные функции невязки не будут являться линейными, что приводит к необходимости решения нелинейной системы уравнений. Вместо этого будем минимизировать функцию невязки, то есть подберем переменные a_i таким образом, чтобы отклонение аппроксимирующей функции от данных значений y_i в узлах x_i было минимальным. Воспользуемся для этого методом Ньютона поиска минимума нелинейной функции, который основан на замене функции $Q(a)$ частью ряда Тейлора этой функции вплоть до квадратичных членов [4]. Этот метод является итерационным и поэтому работает с определенной погрешностью. Чем точнее нужен результат, тем больше необходимо проделать итераций.

Общая формула метода Ньютона имеет вид

$$a_{k+1} = a_k - (\nabla^2 Q(a_k))^{-1}\,\nabla Q(a_k),$$

где a_{k+1} – следующая точка; a_k – текущая точка; $\nabla Q(a_k)$ – градиент функции невязки; $\nabla^2 Q(a_k)$ – матрица Гессе вторых производных функции невязки (гессиан).

Однако метод Ньютона имеет ряд существенных недостатков:

– отсутствие глобальной сходимости для многих задач;

– необходимость в вычислении гессиана $\nabla^2 Q(a_k)$ на каждой итерации;

– необходимость решения на каждой итерации системы линейных уравнений, которая может быть вырожденной или плохо обусловленной;

– метод сильно зависит от начального приближения.

В некоторых задачах метод Ньютона вообще может не работать. Обычно это происходит из-за того, что шаг, который делается из текущей точки a_k, слишком велик или слишком мал. Делая большие шаги, можно промахнуться мимо точки минимума и уйти далеко в сторону, где квадратичная модель снова может повести себя плохо и отбросить нас назад в исходную точку, тогда произойдет зацикливание. Делая маленькие шаги, рискуем вообще никогда не добраться до точки минимума.

Для решения вышеописанных проблем используется глобально сходящийся метод Ньютона, который в подавляющем большинстве случаев дает хороший результат. Основная идея этого метода заключается в следующем. Ограничим длину шага метода Ньютона некоторой положительной величиной δ, которую будем называть радиусом доверительной области. Теперь задача сводится к нахождению минимума квадратичной модели на многомерной сфере радиуса δ. Метод, который при этом используется, предложен Пауэллом [4] и называется «шаг с двойным изломом». Он заключается в том, что исходную квадратичную модель специальным образом заменяют кусочно-линейной функцией, тогда точка пересечения этой ломаной со сферой даст искомый минимум квадратичной модели. Для решения поставленной задачи был использован подход «Модель – доверительная область» [4].

Глобально сходящаяся модификация метода Ньютона состоит из следующих шагов:

1) вычисляется $\nabla Q(a_k)$, и принимается решение остановить процесс или продолжить;

2) вычисляется $H_k = \nabla^2 Q(a_k)$;

3) если H_k не является положительно определенной, то в нее вносится возмущение $\mu_k E$, где μ_k достаточно велико, чтобы сделать матрицу H_k положительно определенной;

4) решается система уравнений $H_k s_k^N = -\nabla Q(a_k)$;

5) принимается решение: либо сделать шаг по Ньютону $a_{k+1} = s_k^N + a_k$, либо выбирать a_{k+1} в соответствии с глобальной стратегией.

Алгоритм повторяется с пункта 1.

Описанный алгоритм называется квазиньютоновским.

В ходе работы алгоритма могут возникнуть следующие проблемы:

– достигнуто малое убывание значения функции $Q(a)$, по сравнению с длиной шага;

– шаги слишком малы, по сравнению с первоначальной скоростью убывания функции $Q(a)$.

Чтобы избежать указанных проблем, были применены подход «модель – доверительная область» и метод «шаг с двойным изломом», и на его основе создана программа, позволяющая аппроксимировать оценки регулировочных характеристик нелинейной функцией вида (2).

В результате получаем аналитическую зависимость, которая может быть использована для создания имитационных моделей регулировочных характеристик регулирующих органов (рис. 2).

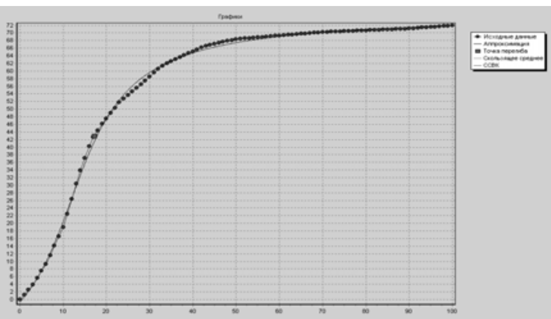

Рис. 2. Сравнение исходной и аппроксимирующей пропускных характеристик

Расчетные формулы метода. Представим функцию невязки (3) в следующем виде:

$$Q(a) = \frac{1}{2} R(a)^T R(a) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} r_i(a)^2,$$

где $R : R^m \to R^n$ – вектор-функция, которую также назовем функцией невязки, $n > m$; $r_i(a)$ – i-я компонента вектор-функции $R(a)$; $a \in R^m$ – вектор параметров аппроксимирующей функции $\bar{f}(x)$; множитель $\frac{1}{2}$ вводится для компенсирования двойки, возникающей при дифференцировании [5].

Далее задача сводится к отысканию $\min\limits_{a \in R^m} Q(a)$, при этом размерность m пространства параметров много меньше размерности n вектора исходных данных.

При проведении вычислений по методу Ньютона необходимо найти градиент и гессиан функции невязки $Q(a)$:

$$\nabla Q(a) = \frac{1}{2} \nabla \left(\sum_{i=1}^{n} r_i(a)^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} r_i(a) \nabla r_i(a) =$$

$$= J(a)^T R(a),$$

где $J(a)$ – матрица Якоби функции $R(a)$.

В рассматриваемой задаче

$$r_i(a) = y_i - (a_0 \operatorname{arctg}(a_1 (x_i - a_2)) + a_3).$$

Гессиан функции невязки имеет вид

$$\nabla^2 Q(a) = \nabla \left(\sum_{i=0}^{n} r_i(a) \cdot \nabla r_i(a) \right) =$$

$$\sum_{i=0}^{n} (\nabla r_i(a) \nabla r_i(a)^T + r_i(a) \cdot \nabla^2 r_i(a) =$$

$$= J(a)^T J(a) + S(a),$$

где $S(a) = \sum\limits_{i=0}^{n} r_i(a) \cdot \nabla^2 r_i(a)$; $\nabla^2 r_i(a)$ – матрица Гессе для функции $r_i(a)$.

Тогда квадратичной моделью для окрестности точки a_c будет

$$m_c(a) = \frac{1}{2} R(a_c)^T R(a_c) + R(a_c)^T J(a_c)(a - a_c) + \\ + \frac{1}{2} (a - a_c)^T (J(a_c)^T J(a_c) + S(a_c))(a - a_c). \quad (4)$$

Окончательная формула шага по методу Ньютона для метода наименьших квадратов имеет вид

$$a_+ = a_c - (J(a_c)^T J(a_c) + S(a_c))^{-1} R(a_c)^T J(a_c),$$

где a_c – текущая точка; a_+ – следующая точка.

Рассмотрим условия приемлемости точки a_+.

Если достигнуто малое убывание значения функции $Q(a)$, по сравнению с длиной шага, то решить эту проблему можно, потребовав, чтобы средняя скорость убывания функции от $Q(a_c)$ до $Q(a_+)$ составляла заданную долю от первоначальной скорости убывания функции в этом направлении, т. е.

$$Q(a_+) \le Q(a_c) + \alpha \cdot \nabla Q(a_c)^T (a_+ - a_c) \quad (5)$$

при некотором $\alpha \in (0;1)$ (обычно берется $\alpha = 10^{-4}$).

Если проблема состоит в том, что шаги слишком малы, по сравнению с первоначальной скоростью убывания функции Q(a), то потребуем, чтобы скорость уменьшения функции вдоль направления ($a_+ - a_c$) в точке a_+ была больше, чем некоторая заданная доля скорости уменьшения вдоль направления ($a_+ - a_c$) в точке a_c, т. е.

$$\nabla Q(a_+)^T (a_+ - a_c) \ge \beta \cdot \nabla Q(a_c)^T (a_+ - a_c) \qquad (6)$$

при некотором $\beta \in (\alpha;1)$.

На практике выполнение условия (6) обычно не требуется, так как глобальные стратегии обычно позволяют избегать малых шагов.

Далее применяем подход «Модель – доверительная область». Смысл метода заключается в том, что некоторая оценка сверху длины δ_c успешного шага, который возможно выполнить из точки a_c, порождает область, в которой можно доверять квадратичной модели $m_c(a)$ (4) в том, что она адекватно моделирует Q(a).

Чтобы наилучшим образом выбрать шаг из a_c максимальной длины δ_c, необходимо попробовать сделать шаг длиной s_c, который удовлетворяет условию

$$\min\ m_c(a_c + s) = Q(a_c) + \nabla Q(a_c)^T s + \frac{1}{2} s^T H_c s$$

при $\|s\| \le \delta_c$,

где $\|\cdot\|$ обозначает ℓ_2-норму.

Решением этой задачи является $s(\mu) = -(H_c^{-1} + \mu E)\nabla Q(a_c)$ Q(a) для единственного $\mu \geq 0$ такого, что $\|s(\mu)\| = \delta_c$. В случае выполнения неравенства $\|s(0)\| \le \delta_c$, решением задачи является $s(0) = s_c^N$, где s_c^N – квазиньютоновский шаг из точки a_c в точку глобального минимума локальной квадратичной модели $m_c(a)$.

Далее кривую $s(\mu)$ аппроксимируем кусочно-линейной функцией, соединяющей точку C (точку Коши) минимума квадратичной модели $m_c(a)$ на направлении наискорейшего спуска с ньютоновским направлением. Причем точка a_+ берется так, чтобы $\|a_+ - a_c\| = \delta_c$. Точка C определяется по формуле $C = a_c - \lambda^* \nabla Q(a_c)$, где λ^* – единственное решение задачи

$$\min_{\lambda \in R} m_c(a_c - \lambda \cdot \nabla Q(a_c)) = Q(a_c) -$$

$$-\lambda \|\nabla Q(a_c)\|^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 \cdot \nabla Q(a_c)^T H_c \nabla Q(a_c),$$

$$\lambda^* = \frac{\|\nabla Q(a_c)\|^2}{\nabla Q(a_c)^T H_c \nabla Q(a_c)}.$$

Если $\delta_c \le \lambda^* \|\nabla Q(a_c)\|^2$, то алгоритмом делается шаг длиной δ_c в направлении наискорейшего спуска:

$$a_+ = a_c - \frac{\delta_c}{\|\nabla Q(a_c)\|} \nabla Q(a_c).$$

Точка $\bar{N}$ на кривой с двойным изломом (рис. 3) выбирается из условия

$$\bar{N} = a_c - \eta H_c^{-1} \cdot \nabla Q(a_c)$$

для η = 0,8γ + 0,2, где γ вычисляется по формуле

$$\gamma = \frac{\|\nabla Q(a_c)\|^4}{\left(\nabla Q(a_c)^T H_c \cdot \nabla Q(a_c)\right)\left(\nabla Q(a_c)^T H_c^{-1} \cdot \nabla Q(a_c)\right)}.$$

Найденная таким образом точка a_+ проверяется на соответствие условию приемлемости (5). Если точка оказывается неприемлемой, то размер доверительной области уменьшают и расчет повторяют.

Предположим, что a_+ уже найдено. Если a_+ – полный ньютоновский шаг, то этот шаг выполняется, пересчитывается δ_c, строится новая модель и происходит переход к следующей итерации. Если ($a_+ - a_c$) не является ньютоновским, то следует попытаться сделать шаг в два раза больше, что позволит избежать лишних вычислений градиента и гессиана.

Сравним реальное уменьшение функции $\Delta Q(a) = Q(a_+) - Q(a_c)$ и предсказанное $\Delta Q_{pred}(a) = m_c(a_+) - Q(a_c)$.

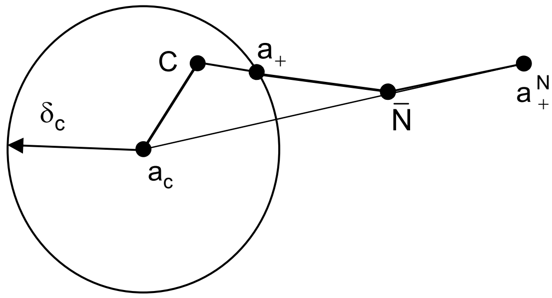

Рис. 3. Модель «шаг с двойным изломом»

Если соответствие между ними удовлетворяет неравенству

$$\Delta Q_{pred}(a) - \Delta Q(a) \le 0{,}1 |\Delta Q(a)|,$$

то величина δ_c недооценивает радиуса доверительной области, в которой модель $m_c(a)$ адекватно представляет Q(a). Если уменьшение функции настолько велико, что оно говорит о наличии отрицательной кривизны, то есть $Q(a_+) \le Q(a_c) + \nabla Q(a_c)^T (a_+ - a_c)$, то это обещает продолжение быстрого изменения Q(a). В обоих случаях запоминаются значения a_+ и Q(a+), вдвое увеличивается размер доверительной области, и вычисления повторяются. Если для нового a_+ условие приемлемости (V) не выполняется, то происходит возвращение к последнему приемлемому шагу.

Список литературы

1. **Ротач В.Я.** Теория автоматического управления: Учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МЭИ, 2004.

2. **Львовский Е.Н**. Статистические методы построения эмпирических формул: Учеб. пос. для втузов. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1988.

3. **Дьяконов В.П.** Mathcad 8–12 для студентов. Сер.: Библиотека студента. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005.

4. **Денис Дж., Шнабель Р.** Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989.

5. **Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.** Практическая оптимизация: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985.

6. **Тейлор Дж.** Введение в теорию ошибок: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985.

Агафонова Надежда Александровна,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики,
телефон (4932) 26-97-62,
e-mail: higher@math.ispu.ru

Маршалов Евгений Дмитриевич,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
ведущий инженер учебно-тренажерного центра автоматизированных систем,
телефон (4932) 26-97-58,
e-mail: kafsu@su.ispu.ru

Наумов Юрий Владимирович,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
аспирант кафедры систем управления,
телефон (4932) 26-97-58,
e-mail: kafsu@su.ispu.ru