© «Вестник ИГЭУ» Вып. 2 2006 г.

УДК 621.3.011.013.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

КАДНИКОВ С.Н., д-р техн. наук, СЕРГЕЕВА И.Е., асп.

Предлагается математическая модель в форме системы интегральных уравнений с сингулярными интегральными операторами. Приведено доказательство единственности решения полученной системы и обоснована возможность ее практического применения для расчета магнитного поля в шихтованных магнитопроводах трансформаторов и электрических машин.

Ключевые слова: магнитное поле, математическая модель, интегральные уравнения, сингулярные операторы.

MAGNETIC FIELD MATHEMATICAL MODELING IN PIECEWISE-UNIFORM ANISOTROPIC ENVIRONMENT

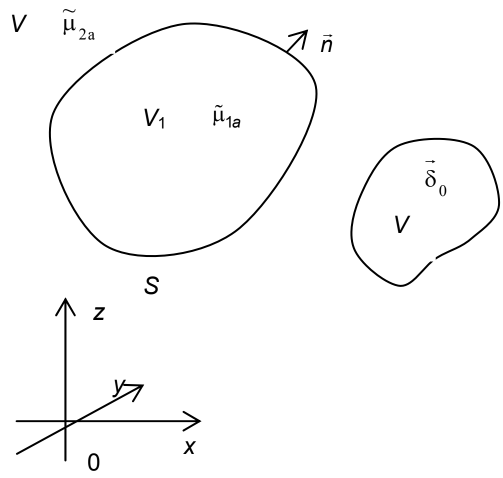
KADNIKOV S.N., Ph.d., SERGEEVA I.E., postgraduate.

The article concerns the mathematical model in the form of integral equation system with singular integral operators. The article proves the uniqueness of given system solution and demonstrates the possibility of its practical application for magnetic field calculation in laminated cores of transformers and electrical machines.

Key words: magnetic filed, mathematical model, integral equation, singular operators.

При расчете магнитного поля в трансформаторах и реакторах необходимо учитывать шихтовку сердечников и магнитную анизотропию стали. Это осуществляется путем замены слоистой среды сердечников сплошной анизотропной средой [1, 2, 3], что позволяет применить для расчета поля известные численные методы. Если среда предполагается линейной и кусочно-однородной, то наиболее эффективны, т.е. точны и экономичны, граничные интегральные уравнения (ГИУ). Методика построения ГИУ для расчета статического магнитного поля впервые была предложена в [3] (приоритет 8.12.1971 г.), где расчет поля постоянного магнита сведен к системе уравнений первого и второго рода, полученных с использованием скалярных потенциалов простого слоя. Другая модель в виде системы интегральных уравнений второго рода, для построения которой использовались потенциалы простого и двойного слоев, рассматривается в [4]. Однако практические возможности такого рода моделей, в которых в каждой из областей используется свое представление для потенциалов со своей плотностью (простого или двойного слоя зарядов), ограничены. Дело в том, что листы трансформаторной стали, а следовательно, и оси их магнитной анизотропии ориентированы по-разному в различных объемах сердечников (стержнях и ярмах) по отношению к некоторой общей для всего устройства декартовой системе координат. Поэтому сердечник трансформатора с расчетной точки зрения следует рассматривать как кусочно-однородную среду. Нетрудно установить, что при нечетном числе граничащих областей в некоторых из них придется применять потенциалы одинакового типа. Модель, предложенная в [3], в этом смысле более универсальна, однако она включает интегральные уравнения первого рода, что может привести к значительным вычислительным погрешностям. Кроме того, ее применение при расчетах полей трансформаторов потребует вычисления скалярных потенциалов токов, протекающих по обмоткам, являющихся многозначными функциями, что может привести к существенному и практически неоправданному усложнению алгоритмов. Показано, что при использовании скалярных и векторных потенциалов в каждой из отдельных однородных областей магнитной среды можно получить практически эффективную модель, лишенную указанных выше ограничений.

Чтобы выяснить основные особенности методики построения ГИУ для расчета магнитного поля в многосвязных областях, характерных для магнитопроводов, рассмотрим следующую модельную задачу. Области V_1 и V_2 (см. рисунок), заполнены однородной анизотропной магнитной средой с тензорами магнитной проницаемости $\tilde{\mu}_{1a} = \mu_0\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_{2a} = \mu_0\tilde{\mu}_2$, $\tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2$.



Допускаем, что геометрия областей V_1 и V_2 позволяет определить тензоры $\tilde{\mu}_{1a}, \tilde{\mu}_{2a}$ как диагональные в одной и той же общей системе декартовых координат. Источники внешнего поля (постоянные токи), локализованные в области V_0, находятся в области V_2. Вектора вторичного поля $\vec{H}$ и $\vec{B}$ во всем пространстве, исключая граничную поверхность S, должны удовлетворять уравнениям:

$$\operatorname{rot}\vec{H}_{1,2} = 0\,; \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\vec{B}_{1,2} = 0\,, \tag{2}$$

причем в области V_1

$$\vec{B}_1 = \vec{i}\,\mu_0\mu_{1x}H_{1x} + \vec{j}\,\mu_0\mu_{1y}H_{1y} + \vec{k}\,\mu_0\mu_{1z}H_{1z} = \mu_0\tilde{\mu}_1\vec{H}_1\,,$$

в области V_2

$$\vec{B}_2 = \vec{i}\,\mu_0\mu_{2x}H_{2x} + \vec{j}\,\mu_0\mu_{2y}H_{2y} + \vec{k}\,\mu_0\mu_{2z}H_{2z} = \mu_0\tilde{\mu}_2\vec{H}_2.$$

На границе раздела областей S должны выполняться краевые условия:

$$\left[\vec{n},\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right] = \left[\vec{n},\vec{H}_{01} - \vec{H}_{02}\right], \tag{3}$$

$$\left(\vec{n},\tilde{\mu}_2\vec{H}_2 - \tilde{\mu}_1\vec{H}_1\right) = \left(\vec{n},\tilde{\mu}_1\vec{H}_{01} - \tilde{\mu}_2\vec{H}_{02}\right), \tag{4}$$

где $\vec{H}_{01},\vec{H}_{02}$ – векторы внешнего поля (см. ниже). Для решения краевой задачи (1)–(4) будем использовать скалярный и векторный потенциалы. Скалярный потенциал φ в однородной анизотропной среде в тех областях, где отсутствуют источники поля, должен удовлетворять уравнению [4]

$$\mu_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \mu_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 y} + \mu_z\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0\,, \tag{5}$$

где μ_x,μ_y,μ_z – компоненты диагонального тензора.

Если поле создается поверхностными зарядами с плотностью σ, то решение уравнения (5) может быть представлено в виде

$$\varphi_q = \frac{1}{4\pi m^{\frac{1}{3}}}\int_S \sigma_p\frac{dS_p}{R_a},\ q \notin S\,, \tag{6}$$

где $m = \sqrt{\mu_x\mu_y\mu_z}$;

$$R_a = \sqrt{\frac{\left(x_q - x_p\right)^2}{\mu_x} + \frac{\left(y_q - y_p\right)^2}{\mu_y} + \frac{\left(z_q - z_p\right)^2}{\mu_z}}\,. \tag{7}$$

Вектор $\vec{H} = -\nabla\varphi$, следовательно,

$$\vec{H}_q = \frac{\tilde{\mu}^{-1}}{4\pi m^{\frac{1}{3}}}\int_S \sigma_p\frac{\vec{R}}{R_a^{\ 3}}dS_p\,. \tag{8}$$

Чтобы получить представление для векторного потенциала постоянных токов в однородной анизотропной среде, используем соотношение $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$, из которого следует $\vec{H} = \tilde{\mu}_a^{\ -1}\operatorname{rot}\vec{A}$. Полагая, что в некоторой области V пространства локализованы токи с плотностью $\vec{\delta}$, получаем уравнение

$$\operatorname{rot}\left(\tilde{\mu}^{-1}\operatorname{rot}\vec{A}\right) = \mu_0\vec{\delta}\,. \tag{9}$$

Вводя новый вектор $\vec{A}_1 = \mu_0\tilde{\mu}\vec{A}$ и полагая $\operatorname{div}\vec{A}_1 = 0$, уравнение (9) можно привести к виду

$$\mu_x\frac{\partial^2\vec{A}_1}{\partial x^2} + \mu_y\frac{\partial^2\vec{A}_1}{\partial y^2} + \mu_z\frac{\partial^2\vec{A}_1}{\partial z^2} = -\mu_0 m^2\vec{\delta}\,. \tag{10}$$

Путем замены переменных $x = \sqrt{\mu_x}\cdot x_1$, $y = \sqrt{\mu_y}\cdot y_1$, $z = \sqrt{\mu_z}\cdot z_1$ уравнение (10) приводится к известному векторному уравнению Пуассона для однородной изотропной среды, из которого после возврата к прежним переменным можно получить искомое выражение для потенциала $\vec{A}$:

$$\vec{A}_q = \frac{\mu_0 m^2\tilde{\mu}^{-1}}{4\pi}\int_V \vec{\delta}\frac{dV_p}{R_a}\,. \tag{11}$$

Поскольку для постоянных токов $\operatorname{div}\vec{\delta} = 0$, то потенциал $\vec{A}_1 = \tilde{\mu}\vec{A}$ будет удовлетворять условию $\operatorname{div}\vec{A}_1 = 0$ [6]. Если постоянные токи распределены по некоторой поверхности S, то

$$\vec{A}_q = \frac{\mu_0 m^2\tilde{\mu}^{-1}}{4\pi}\oint_S \vec{i}_p\frac{dS_p}{R_a}\,, \tag{12}$$

где $\vec{i}_p$ – плотность поверхностных токов.

Для соблюдения условия $\operatorname{div}\vec{A}_1 = 0$ необходимо, чтобы $\operatorname{div}_S\vec{i} = 0$ (div_S – обозначение поверхностной дивергенции). Это условие будет вытекать из интегральных уравнений. Используя соотношение $\vec{H} = \tilde{\mu}_a^{\ -1}\operatorname{rot}\vec{A}$, из (12) находим

$$\vec{H}_q = \frac{1}{4\pi m}\int_S \frac{\left[\vec{i}_p,\vec{R}\right]}{R_a^{\ 3}}dS_p\,. \tag{13}$$

Используя формулы (8), (13), представим искомые вектора $\vec{H}_1,\vec{H}_2$ в областях V_1 и V_2 в следующем виде:

$$\vec{H}_{1q} = \frac{1}{4\pi m_1}\oint_S \frac{\left[\vec{i}_p,\vec{R}\right]}{R_{1a}^3}dS_p + \frac{\tilde{\mu}_1^{-1}}{4\pi m_1}\oint_S \sigma_p\frac{\vec{R}}{R_{1a}^3}dS_p\,, \tag{14}$$

$$\vec{H}_{2q} = \frac{1}{4\pi m_2}\oint_S \frac{\left[\vec{i}_p,\vec{R}\right]}{R_{2a}^3}dS_p + \frac{\tilde{\mu}_2^{-1}}{4\pi m_2}\oint_S \sigma_p\frac{\vec{R}}{R_{2a}^3}dS_p\,, \tag{15}$$

где $m_1 = \sqrt{\mu_{1x}\mu_{1y}\mu_{1z}}$; $m_2 = \sqrt{\mu_{2x}\mu_{2y}\mu_{2z}}$; R_{1a}, R_{2a} выражаются формулой (7).

Данные формулы выражают магнитное поле в областях V_1 и V_2 через одни и те же плотности тока $\vec{i}$ и заряда σ. Этим они отличаются от варианта, предложенного в [4], где в одной из областей поле определяется потенциалом простого слоя, а в другой – двойного слоя зарядов.

Вектора внешнего поля $\vec{H}_{01},\vec{H}_{02}$ в областях V_1, V_2 определяются формулами:

$$\vec{H}_{01q} = \frac{1}{4\pi m_1}\int_{V_0} \frac{\left[\vec{\delta}_{0p},\vec{R}\right]}{R_{1a}^3}dS_p\,, \tag{16}$$

$$\vec{H}_{02q} = \frac{1}{4\pi m_2}\int_{V_0} \frac{\left[\vec{\delta}_{0p},\vec{R}\right]}{R_{2a}^3}dS_p\,. \tag{17}$$

При этом $\vec{B}_{01} = \mu_0\tilde{\mu}_1\vec{H}_{01}$, $\vec{B}_{02} = \mu_0\tilde{\mu}_2\vec{H}_{02}$. Такие представления для векторов внешнего поля также отличаются от принятых в [4], где они определяются только в одной из областей. Они имеют то преимущество, что в случае однородной среды граничные условия (3), (4) становятся однородными и вторичное поле обращается в нуль (что физически вполне естественно), в то время как в модели, предложенной в [4], первичное поле получается как решение ГИУ.

Далее для построения системы ГИУ необходимо вычислить, согласно граничным условиям (3), (4), предельные значения касательных составляющих напряженности и нормальных составляющих индукции на внутренней и внешней сторонах граничной поверхности S. Используя для этой цели методику, данную в [5], и подставляя полученные предельные значения в (3), (4), получим следующую систему интегральных уравнений

$$\vec{i}_q+\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\vec{n}_q\left[\vec{i}_p,\vec{R}\right]\right]\left(\frac{1}{m_2R_{2a}^3}-\frac{1}{m_1R_{1a}^3}\right)dS_p+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\oint_S\sigma_p\left[\vec{n}_q,\vec{R}\right]\left(\frac{\tilde{\mu}_2^{-1}}{m_2^{\frac{1}{3}}R_{2a}^3}-\frac{\tilde{\mu}_1^{-1}}{m_1^{\frac{1}{3}}R_{1a}^3}\right)dS_p= \quad (18)$$
$$=\left[\vec{n}_q,\vec{H}_{01}-\vec{H}_{02}\right];$$

$$\sigma_q+\frac{1}{2\pi m_S}\oint_S\sigma_p\left(\vec{n}_q,\vec{R}\right)\left(\frac{1}{m_2^{\frac{1}{3}}R_{2a}^3}-\frac{1}{m_1^{\frac{1}{3}}R_{1a}^3}\right)dS_p+$$
$$+\frac{1}{2\pi m_S}\oint_S\left(\vec{n}_q\left[\vec{i}_p,\vec{R}\right]\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{m_2R_{2a}^3}-\frac{\tilde{\mu}_1}{m_1R_{1a}^3}\right)dS_p= \quad (19)$$
$$=\frac{2}{m_S}\left(\vec{n}_q,\tilde{\mu}_1\vec{H}_{01}-\tilde{\mu}_2\vec{H}_{02}\right),$$

где $m_S=m_1^{\frac{2}{3}}+m_2^{\frac{2}{3}}$.

Чтобы обосновать возможность применения системы уравнений (18), (19) для расчета поля, необходимо доказать, что ее решение единственно.

Доказательство единственности проводится в два этапа. Сначала надо доказать, что однородная краевая задача (1)–(4) имеет только нулевое решение. Из (1) следует, что векторы $\vec{H}_1,\vec{H}_2$ можно представить в следующем виде: $\vec{H}_1=-\nabla\varphi_1$; $\vec{H}_2=-\nabla\varphi_2$, где потенциалы φ_1,φ_2 определены формулой (6) при $m=m_1$ и $m=m_2$. В областях V_1 и V_2 они подчиняются уравнениям:

$$\Delta_1\varphi_1=0, \quad (20)$$

$$\Delta_2\varphi_2=0, \quad (21)$$

где Δ_1,Δ_2 – дифференциальные операторы вида (5) с соответствующими значениями компонент тензоров $\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2$.

Согласно (3), (4) потенциалы φ_1,φ_2 должны удовлетворять на S однородным граничным условиям:

$$\left[\vec{n},\nabla\varphi_2-\nabla\varphi_1\right]=0; \quad (22)$$

$$\left(\vec{n},\tilde{\mu}_2\nabla\varphi_2-\tilde{\mu}_1\nabla\varphi_1\right)=0. \quad (23)$$

Краевая задача (20)–(23) при условии, что потенциал φ_2 затухает на бесконечности как R_{pq}^{-1}, где $p\in V_1,q\in V_2$, имеет решение $\varphi_1=c_1$, $\varphi_2=0$, где c_1 – произвольная константа. Чтобы это доказать, необходимо учесть, что согласно (23) на S $\varphi_1-\varphi_2=c$ (c – постоянная). Далее используются тождества Грина:

$$\oint_S\varphi_1\tilde{\mu}_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}dS=\int_{V_1}\left(\tilde{\mu}_1\nabla\varphi_1,\nabla\varphi_1\right)dV; \quad (24)$$

$$-\oint_S\varphi_2\tilde{\mu}_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}dS=\int_{V_2}\left(\tilde{\mu}_2\nabla\varphi_2,\nabla\varphi_2\right)dV, \quad (25)$$

где $\tilde{\mu}_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\left(\vec{n},\tilde{\mu}_1\nabla\varphi_1\right)$.

Складывая данные соотношения и учитывая условие (21) и равенство $\varphi_1-\varphi_2=c$, можно получить следующую формулу:

$$c\oint_S\tilde{\mu}_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}dS=\int_{V_1}\left(\tilde{\mu}_1\nabla\varphi_1,\nabla\varphi_1\right)dV+$$
$$+\int_{V_2}\left(\tilde{\mu}_2\nabla\varphi_2,\nabla\varphi_2\right)dV. \quad (26)$$

Левая часть данного соотношения равна нулю согласно теореме Гаусса и уравнению (25). Тогда $\varphi_1=c_1$, $\varphi_2=c_2$, где c_1,c_2 – произвольные константы. Поскольку на бесконечности $\varphi_2=0$, $c_2=0$, то $\varphi_1=c_1$, $\varphi_2=0$, т.е. получается требуемый результат. При этом, очевидно, $\vec{H}_1=0$ в V_1, $\vec{H}_2=0$ в V_2. В итоге краевые условия (3), (4) при $\vec{H}_{01}=0$, $\vec{H}_{02}=0$ можно переписать в следующем виде:

$$\left[\vec{n},\vec{H}_1\right]=0; \quad (27)$$

$$\left[\vec{n},\vec{H}_2\right]=0; \quad (28)$$

$$\left(\vec{n},\tilde{\mu}_1\vec{H}_1\right)=0; \quad (29)$$

$$\left(\vec{n},\tilde{\mu}_2\vec{H}_2\right)=0. \quad (30)$$

Будем считать, что вектор $\vec{H}_1$ определен согласно (14) не только в области V_1, но и в V_2, и обозначим его в области V_2 через $\vec{H}_2^1$. Тогда, поскольку касательная производная потенциала простого слоя непрерывна при переходе через S, то

$$\left[\vec{n},\vec{H}_2^1\right]-\left[\vec{n},\vec{H}_1\right]=\left[\vec{n},\vec{H}_2^1\right]=\vec{i}. \quad (31)$$

Аналогичным образом, определив вектор $\vec{H}_1^2$ в области V_1 по формуле (15), можно найти

$$\left[\vec{n},\vec{H}_2\right]-\left[\vec{n},\vec{H}_1^2\right]=-\left[\vec{n},\vec{H}_1^2\right]=\vec{i}. \quad (32)$$

В результате из (31), (32) следует, что

$$\left[\vec{n},\vec{H}_1^2\right]+\left[\vec{n},\vec{H}_2^1\right]=0. \quad (33)$$

Поскольку вектор $\vec{H}_1$ определен по формуле (14) во всем пространстве, то нормальная составляющая первого члена в (14) при переходе через S непрерывна. То же самое справедливо и для первого члена в (15), если вектор $\vec{H}_2$ определен по этой формуле во всем пространстве. Тогда, используя (29), (30), получаем:

$$\left(\vec{n},\tilde{\mu}_2\vec{H}_2^1\right)-\left(\vec{n},\tilde{\mu}_1\vec{H}_1\right)=\left(\vec{n},\tilde{\mu}_2\vec{H}_2^1\right)=\sigma; \qquad (34)$$

$$\left(\vec{n},\tilde{\mu}_2\vec{H}_2\right)-\left(\vec{n},\tilde{\mu}_1\vec{H}_2^1\right)=-\left(\vec{n},\tilde{\mu}_1\vec{H}_2\right)=\sigma. \qquad (35)$$

Из этого следует, что

$$\left(\vec{n},\tilde{\mu}_1\vec{H}_1^2\right)+\left(\vec{n},\tilde{\mu}_2\vec{H}_2^1\right)=0. \qquad (36)$$

Полагая $\vec{H}_1^2=-\nabla\varphi_1^2$, $\vec{H}_2^1=-\nabla\varphi_2^1$, из (33) можно найти, что $\varphi_1^2+\varphi_2^1=c=\text{const}$, а из (36) следует, что $\left(\vec{n},\tilde{\mu}_1\nabla\varphi_1^2\right)=-\left(\vec{n},\tilde{\mu}_2\nabla\varphi_2^1\right)$. С использованием данного соотношения и тождеств (24), (25) можно снова получить равенство (26), из которого будет следовать, что $\vec{H}_1^2=0$ в области V_1, $\vec{H}_2^1=0$ в V_2. Но тогда из формул (31), (34) вытекает, что $\vec{i}=0$, $\sigma=0$, что и требовалось доказать. Тем самым установлено, что математическая модель в форме уравнений (18), (19) может быть использована для расчета магнитного поля и интегральных параметров трансформаторов и реакторов с индуктивными сердечниками.

Заключение

1. Установлено, что при математическом моделировании магнитного поля в кусочно-однородной анизотропной среде система интегральных уравнений содержит сингулярные операторы.

2. Полученная система сингулярных интегральных уравнений может решаться стандартными численными методами, в частности путем редукции к системе линейных алгебраических уравнений.

Список литературы

1. **Острейко В.Н.** Расчет электромагнитных полей в многослойных средах. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. – 152 с.

2. **Колесников Э.В.** Уравнения электромагнитного поля в пакете стальных анизотропных пластин // Изв. вузов. Электромеханика. – 1973. – № 7. – С. 4–6.

3. **Колесников Э.В.** Интегральные уравнения для расчета поля однородно намагниченного постоянного магнита // Изв. вузов. Электромеханика. – 1975. – № 4.

4. **Тозони О.В., Маейргойз И.Д.** Расчет трехмерных электромагнитных полей. – Киев, 1974. – 352 с.

5. **Кадников С.Н., Сергеева И.Е.** Интегральные уравнения для расчета трехмерного магнитного поля в анизотропной среде // Вестник ИГЭУ. – 2005. – Вып. 1. – С. 101–106.

6. **Тамм И.Е.** Основы теории электричества. – М.: Наука, 1966. – 620 с.

7. **Гюнтер Н.М.** Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – М.: Гостехиздат, 1953.

8. **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977.

Кадников Сергей Николаевич,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор кафедры теоретических основ электротехники и электротехнологий,
телефон (4932) 26-99-03,
e-mail: zav@toe.ispu.ru

Сергеева Ирина Евгеньевна,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
аспирант кафедры теоретических основ электротехники и электротехнологий,
телефон (4932) 26-99-03,
e-mail: zav@toe.ispu.ru