© «Вестник ИГЭУ» Вып. 4 2006 г.

УДК 66.096.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ СЕКЦИОНИРОВАННОГО ОБЪЕМА С ИНДИВИДУАЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОТЫ В СЕКЦИЯХ

ФОЛОМЕЕВ Д.Ю., асп.

Предложена ячеечная математическая модель для расчета температурного состояния в последовательности секций с индивидуальными источниками теплоты при наличии теплообмена между секциями и окружающей средой. Модель позволяет прогнозировать эволюцию распределения температуры по секциям при изменении или перераспределении мощностей источников и изменении температуры окружающей среды.

Ключевые слова: ячеечная математическая модель, теплообмен, мощность теплового источника.

SIMULATION OF VOLUME SECTION HEAT STATE WITH INDIVIDUAL HEAT SOURCES IN SECTIONS

D.Yu. FOLOMEEV, postgraduate

The work represents the cell-like mathematical model to calculate the temperature state in section series with individual heat sources involving heat interchange between sections and surrounding medium. The model allows forecasting the evolution temperature arrangement throughout the sections under source power changing and rearrangement and surrounding medium temperature changing.

Key words: cell-like mathematical model, heat interchange, heat source power.

Целью настоящего исследования является математическое моделирование распределения температур по секциям замкнутого объема с индивидуальными источниками теплоты при наличии теплообмена между секциями и окружающей средой. Приложением моделирования является, например, тепловой режим жилого или производственного здания с индивидуальными системами отопления в отдельных помещениях. Модель построена на основе теории Маркова [1]. В расчетной схеме процесса (рис. 1) секции представлены совокупностью прямоугольных ячеек в общем случае разного объема и разной ограничивающей их поверхности.

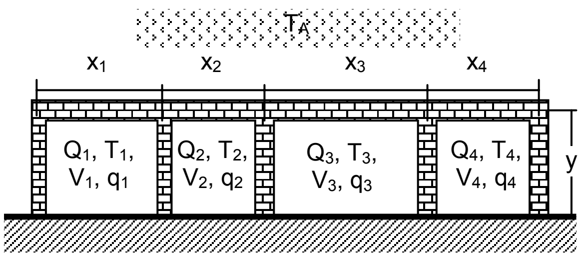

Рис. 1. Расчетная схема процесса

Для построения математической модели рассмотрим сначала перетоки теплоты Q между ячейками в течение выбранного достаточно малого промежутка времени Δt – времени перехода между состоянием i и i+1. Будем считать, что теплоаккумулирующая способность стенок достаточно мала и роль нестационарной теплопроводности невелика. Если рассмотреть только две взаимодействующих ячейки, то соответствующий тепловой баланс может быть записан следующим образом [2]:

$$Q_1^{i+1} = Q_1^i - \Delta Q_1^i = Q_1^i - k_1 S_1 (T_1^i - T_2^i)\Delta t = = Q_1^i - k_1 S_1 \left(\frac{Q_1^i}{c\rho V_1} - \frac{Q_2^i}{c\rho V_2}\right)\Delta t = = \left(1 - \frac{k_1 S_1 \Delta t}{c\rho V_1}\right) Q_1^i + \frac{k_1 S_1 \Delta t}{c\rho V_2} Q_2^i \quad (1)$$

$$Q_2^{i+1} = Q_2^i + \Delta Q_2^i = \frac{k_1 S_1 \Delta t}{c\rho V_1} Q_1^i + \left(1 - \frac{k_1 S_1 \Delta t}{c\rho V_2}\right) Q_2^i, \quad (2)$$

где k_1 – коэффициент теплопередачи; S_1 – площадь поверхности межсекционной перегородки; V_1 и V_2 – объемы секций; c и ρ – удельная теплоемкость и плотность газа в секциях.

Соотношения (1) и (2) могут быть записаны в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{k_1 S_1 \Delta t}{c\rho V_1}\right) & \frac{k_1 S_1 \Delta t}{c\rho V_2} \\ \frac{k_1 S_1 \Delta t}{c\rho V_1} & \left(1 - \frac{k_1 S_1 \Delta t}{c\rho V_2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где на главной диагонали переходной матрицы размещены доли теплоты, остающейся в течение времени Δt в секции, а на примыкающих к ней диагоналях – доли теплоты, переходящей вправо (внизу) и влево (вверху) по ходу последовательности секций.

Обобщая полученный результат на произвольную последовательность из m секций, изменение теплового состояния цепи можно описать матричным равенством

$$\mathbf{Q}^{i+1} = \mathbf{P_Q} \cdot \mathbf{Q}^i, \quad (4)$$

где **Q** – векторы-столбцы запасов теплоты в секциях, $\mathbf{P_Q}$ – переходная матрица для теплоты, структура которой имеет вид

$$\mathbf{P_Q} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_{11} & p_{11} & p_{11} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & p_{11} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{m-1,m-1} & p_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{m,m-1} & p_{m,m} \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

где

$$p_{j+1,j} = \frac{k_j S_j \Delta t}{c\rho V_j},\ p_{j-1,j} = \frac{k_j S_j \Delta t}{c\rho V_{j+1}},\ p_{j,j} = 1 - p_{j-1,j} - p_{j+1,j}. \quad (6)$$

Можно показать, что переходная матрица для температуры является транспонированной матрицей для теплоты $\mathbf{P_T = P_Q^t}$. Тогда эволюция вектора температур также может быть описана матричным равенством

$$\mathbf{T^{i+1} = P_T \cdot T^i}. \qquad (7)$$

Матрица $\mathbf{P_Q}$ предполагает сохранение полного запаса теплоты в объеме всех секций, что следует из равенства единице суммы всех ее элементов в каждом столбце. Суммы же элементов по строкам в общем случае не равны единицам, что свидетельствует о неравномерности асимптотического распределения запасов теплоты по секциям. Матрица $\mathbf{P_T}$, наоборот, имеет по строкам суммы элементов, равные единицам, что дает асимптотически равномерное распределение температуры по секциям, но не равные единицам суммы элементов по столбцам, так как температура не является аддитивной характеристикой.

Источниками теплоты являются тепловые источники в секциях мощностью q_j. Вследствие их действия повышение температуры в j-й ячейке составит

$$T_j^{i+1} = T_j^i + \frac{q_j \Delta t}{c\rho V_j} = T_j^i + a_{qj} q_j, \qquad (8)$$

где

$$a_{qj} = \frac{\Delta t}{c\rho V_j}. \qquad (9)$$

Изменение температуры за счет внешнего теплообмена может быть описано следующим образом:

$$T_j^{i+1} = T_j^i + \frac{A_j k_{Aj} (T_j^i - T_A^i) \Delta t}{c\rho V_j} = T_j^i + a_{Aj} (T_j^i - T_A^i), \qquad (10)$$

где A – площадь поверхности внешнего теплообмена;

$$a_{Aj} = \frac{A_j k_{Aj} \Delta t}{c\rho V_j}. \qquad (11)$$

Объединяя (4)–(11), получим рекуррентное матричное равенство, являющееся основным уравнением предлагаемой модели:

$$\mathbf{T^{i+1} = P_T * (T^i + a_q.*q^i + a_A.*(T^i - T_A^i))}, \qquad (12)$$

где $\mathbf{a_q}$ и $\mathbf{a_A}$ – векторы коэффициентов (9) и (10); $\mathbf{q^i}$ – вектор мощностей источников; $\mathbf{T_A^i}$ – вектор температур окружающей среды (два последних вектора могут меняться от перехода к переходу, то есть описывать регулируемый источник и нестационарные внешние условия); символ «**.***» относится к поэлементному (скалярному) перемножению векторов.

Численные эксперименты, выполненные с этой моделью, позволили качественно смоделировать ряд практически важных для теплоснабжения и энергосбережения ситуаций (рис. 2). Объектом моделирования являлась последовательность четырех секций (помещений) одинакового объема (рис. 1) с одинаковыми коэффициентами теплопередачи через все внутренние и внешние стенки. На каждой паре графиков показано распределение по секциям мощностей тепловых источников и соответствующее ему установившееся распределение температур по секциям.

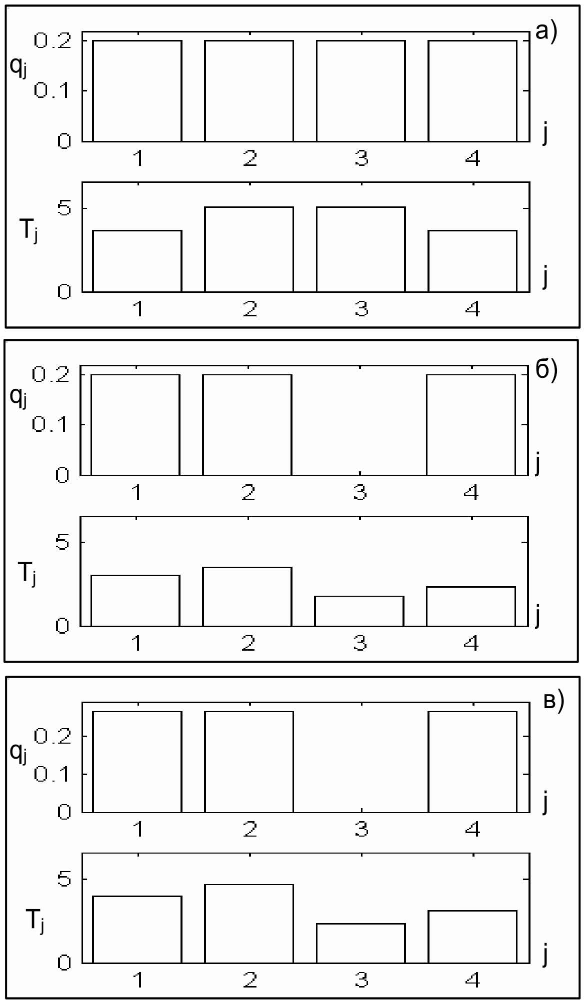

Рис. 2. Пример расчетного моделирования распределения температур в секциях

При одинаковой мощности источников (рис. 2,а) пониженная температура в крайних секциях вызвана большей поверхностью теплоотдачи в окружающую среду.

Пусть источник в секции 3 выключен, а мощность остальных источников осталась прежней (рис. 2,б). Этот случай соответствует полностью независимым индивидуальным источникам теплоты. Температура во всех секциях, естественно, оказывается пониженной, но в секции 3, где источник выключен, она, хотя и падает примерно в 2 раза, но все же остается всего в 2 раза меньше, чем в соседней 2-й секции, то есть секция 3 обогревается за счет окружающих секций.

Пусть источник в секции 3 также выключен, а суммарная мощность источников по всем секциям не изменилась, то есть мощности источников в секциях пропорционально увеличились (рис. 2,в). Этому случаю может соответствовать теплоснабжение от общего источника постоянной суммарной мощности при отключении одного потребителя. Относительное распределение температур по секциям остается примерно таким же, как и в предыдущем случае, однако сами температуры, естественно, оказываются больше.

Разработанная модель позволяет рассчитать программу изменения мощности теплового источника, обеспечивающую заданный интервал температуры (или заданную программу ее изменения) в секции при изменении температуры окружающей среды, оценить, насколько в данной секции может быть использована мощность тепловых источников в других секциях, обозначить и решить некоторые оптимизационные задачи теплоснабжения, а также прогнозировать тепловое состояние объекта при случайном (аварийном) изменении ее характеристик.

Список литературы

1. **Mizonov V., Berthiaux H., Zhukov V.** Application of the Theory of Markovian Chains to Simulation and Analysis of Heat and Mass Transfer / Ecole des Mines d'Albi. – Albi, 2005.

2. **Фоминский С.Н., Зайцев В.А., Мизонов В.Е.** Теплоизоляционные свойства стеновых конструкций с внутренними полостями: Монография / Иван. гос. хим.-технол. ун-т. – Иваново, 2006.