

МОДЕЛЬ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ В МАГНИТОЖИДКОСТНОМ ГЕРМЕТИЗАТОРЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

А.И. ТИХОНОВ¹, Ю.Б. КАЗАКОВ¹, К.М. ПИРОГОВ², А.С. МАРТЫНОВ¹

¹ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
Иваново, Российская Федерация
E-mail: ait@dsn.ru

²ФГБОУВПО «Ивановский государственный университет», Иваново, Российская Федерация
E-mail: piroqov K.M.@.ru

Авторское резюме

Состояние вопроса: Основным недостатком аналитических и численных методов расчета процессов вязкого трения является сложность математического аппарата. В настоящее время большую популярность при решении подобных задач приобретает метод Монте-Карло, отличающийся простотой в алгоритмизации, в том числе, с учетом реализации этих алгоритмов в технологии параллельных вычислений.

Материалы и методы: Для расчета положения магнитной жидкости использовался метод конечных элементов. Для расчета поля скоростей жидкости использовался метод Монте-Карло.

Результаты: Разработан метод расчета момента вязкого трения магнитоожидкостного герметизатора. Сделаны выводы о перспективах использования метода Монте-Карло при решении задач гидродинамики.

Выводы: Использование комбинированного метода позволяет существенно упростить математический аппарат расчета вязкого трения.

Ключевые слова: магнитная жидкость, метод конечных элементов, метод Монте-Карло, вязкое трение, магнитоожидкостный герметизатор.

MODEL OF VISCOUS FRICTION IN MAGNETIC LIQUID SEALER ON THE BASIS OF MONTE CARLO METHOD

A.I. TIKHONOV¹, YU.B. KAZAKOV¹, K.M. PIROQOV², A.S. MARTYNOV¹

¹Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation
E-mail: ait@dsn.ru

²Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation
E-mail: piroqov K.M.@.ru

Abstract

Background: The main drawback of analytical and numerical methods for calculating the processes of viscous friction is the complexity of the mathematical apparatus. At present, the Monte Carlo method becomes more and more popular in solving such problems. It is simple in algorithmization, including the implementation of these algorithms in parallel computing technology.

Materials and methods: For the calculation of the magnetic fluid finite element method is used. The Monte Carlo method is also applied when the velocity field of fluid is calculated.

Results: The method for calculating the moment of viscous friction of magnetic liquid sealer is developed. The conclusions about the prospects of using the Monte Carlo method for solving hydrodynamics problems are made.

Conclusions: The usage of the combined method allows substantially to simplify the mathematical apparatus of viscous friction calculation.

Key words: magnetic fluid, finite element method, Monte Carlo method, viscous friction, magnetic liquid sealer.

Традиционно при решении задач моделирования физических процессов предпочтение отдается аналитическим методам, позволяющим достаточно быстро получить точное решение. Частным случаем данного подхода является использование численных методов моделирования, сводящих задачу к численному решению систем уравнений, построенных на основе аналитических методов. Основным недостатком этих методов моделирования является сложность математического аппарата, которая экспоненциально возрастает, например, по мере уменьше-

ния количества допущений, при возрастании мерности задачи и т.п. В частности, одними из математически наиболее сложных считаются задачи гидродинамики с учетом вязкости моделируемой жидкости, к числу которых относится и расчет момента вязкого трения магнитоожидкостного герметизатора (МЖГ).

Вместе с тем в математике существует направление, связанное с методом Монте-Карло, которое основано на использовании теории вероятностей для решения различных задач. Из физики известно, что любому закону природы

можно дать статистическую интерпретацию, особенно если исследуемый процесс можно интерпретировать с позиций молекулярно-кинетической модели вещества. Главное преимущество метода Монте-Карло состоит в простоте математического аппарата, который базируется на понятных физических представлениях о природе моделируемых процессов.

Основной недостаток недетерминированных методов, в частности метода Монте-Карло, состоит в их медленной сходимости, что предъявляет повышенные требования к компьютерным ресурсам. Однако их простота и наглядность обуславливают возрастающий к ним интерес. Особую актуальность эти методы приобретают в связи с развитием многопроцессорной вычислительной техники, так как недетерминированные методы легко распараллеливаются, в отличие от детерминированных, требующих, как правило, последовательных вычислений. Так как развитие компьютерных технологий в настоящее время напрямую связывается с многопроцессорными вычислительными системами, то можно утверждать, что метод Монте-Карло является одним из наиболее перспективных.

Для примера рассмотрим версию метода Монте-Карло для моделирования процессов вязкого трения в МЖГ. Исходными данными для расчета является параметрически формируемая конечно-элементная модель МЖГ (рис. 1), позволяющая рассчитать магнитное поле с учетом положения магнитной жидкости, а также само это положение с учетом заданного перепада давления (рис. 2) [1].

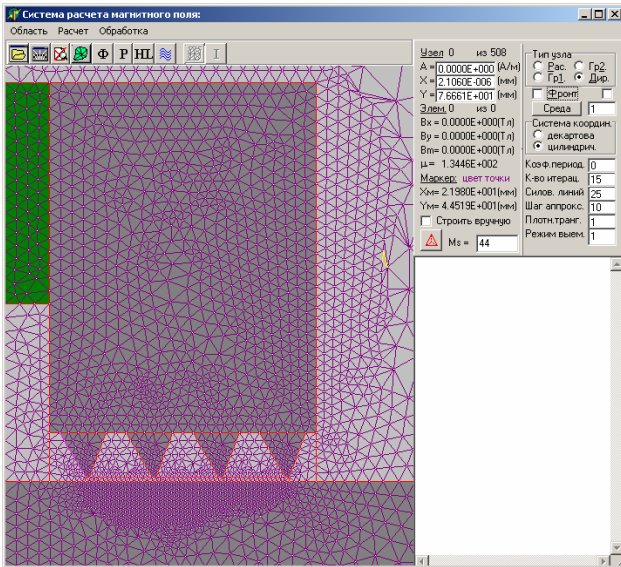


Рис. 1. Конечно-элементная модель магнитожидкостного герметизатора

Расчет методом Монте-Карло реализуется в форме имитационного эксперимента, который строится на совокупности правил, регламентирующих поведение отдельных элементов модели во времени. Это поведение в общих чертах по-

вторяет логику поведения реальных структурных элементов (частиц) моделируемой жидкости, подчиняющаяся статистическим законам.

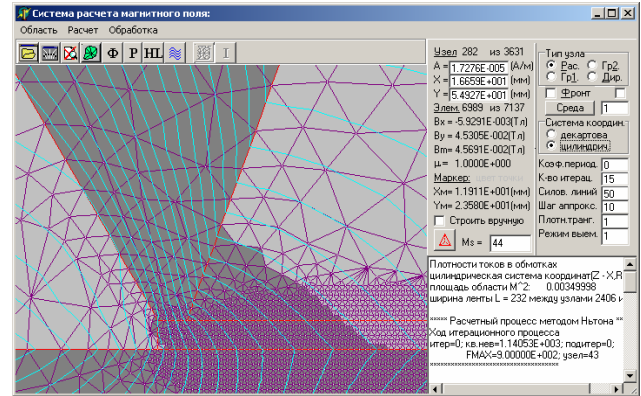


Рис. 2. Положение магнитной жидкости в МЖГ при заданном перепаде давления, рассчитанное с помощью системы конечно-элементного моделирования магнитного поля

Примем ряд допущений:

1. Расчетная область обладает осевой симметрией, что позволяет свести задачу к плоскомеридианной постановке.
2. Магнитная жидкость является несжимаемой ньютоновской жидкостью с заданным динамическим коэффициентом вязкости, величина которого является константой.
3. Положение магнитной жидкости не зависит от скорости вращения вала и однозначно определяется картиной магнитного поля (рис. 2).
4. Скорость вращения вала постоянна.
5. Скорость слоев магнитной жидкости, непосредственно примыкающих к твердым поверхностям, равна линейной скорости движения данной поверхности, которая не достигает критических значений.
6. В течении жидкости отсутствуют вихревые составляющие.

Имитационная модель магнитной жидкости строится из множества частиц, обладающих одинаковой массой m_0 , совершающих броуновское движение с одинаковыми скоростями V_0 в пределах подобласти плоской конечно-элементной модели, занятой магнитной жидкостью (рис. 2). Изначально каждая i -я частица обладает нулевым моментом импульса относительно оси вращения вала, но при соударении с j -й границей раздела сред она увлекается валом, приобретая момент импульса относительно оси вращения

$$L_{0i} = m_0 r_i^2 \omega_j, \quad (1)$$

где r_i – расстояние от i -й частицы до оси вращения; ω_j – угловая скорость j -й границы относительно оси вращения.

При свободном движении частицы ее момент импульса относительно оси вращения вала сохраняется. Изменение этого момента импульса может происходить только при взаимодействии частицы с твердой поверхностью, что никак не

отражается на скорости частицы в осевой плоскости модели.

Так как массы частиц одинаковы, то при столкновении двух частиц, они обмениваются импульсами и моментами импульса. Это значит, что траектории двух столкнувшихся частиц представляют собой две пересекающиеся прямые, движение вдоль которых осуществляется с постоянной скоростью. Так как частицы не отличимы друг от друга, то с учетом сказанного сам факт взаимодействия частиц можно в учет не принимать, считая их движение броуновским.

Численный эксперимент состоит в имитации броуновского движения множества частиц, численностью от одного до нескольких миллионов. Частицы переносят момент импульса по плоскости расчетной области в пределах подобласти, заполненной магнитной жидкостью. После определенного времени релаксации система частиц придет в состояние термодинамического равновесия, характеризующегося неизменным во времени значением среднего момента импульса относительно оси вращения вала в каждой элементарной области, занятой магнитной жидкостью. При этом распределение величины среднего момента импульса будет соответствовать уравнению Лапласа с граничными условиями Дирихле на поверхностях твердых тел ($L_0 = L_{0j}$) и граничными условиями Неймана на свободной границе жидкости.

Плоскость модели покрыта конечно-элементной сеткой. Каждый треугольный элемент является сечением кольца, ось которого совпадает с осью вращения вала. Это кольцо с определенным приближением можно считать обособленной струей, угловая скорость вращения которой определяется средним моментом импульса всех частиц в пределах элемента

$$\omega_k = \frac{\sum_{i=1}^{N_k} L_{ki}}{N_k m_0 r_k^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N_k} r_{ki}^2 \omega_{ki}}{N_k r_k^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N_k} L'_{ki}}{N_k r_k^2}, \quad (2)$$

где L_{ki} , r_{ki} и ω_{ki} – момент импульса, расстояние до оси и угловая скорость i -й частицы, находящейся в пределах k -го треугольного элемента, относительно оси вращения вала; N_k – количество частиц в k -м треугольном элементе; r_k – расстояние от центра тяжести k -го элемента до оси вращения.

В выражении (2) масса частицы m_0 сократилась, то есть эту величину из модели можно исключить, оперируя величиной приведенного момента импульса частицы, связанного с ее моментом импульса относительно оси вращения вала отношением

$$L'_{0i} = r_{0i}^2 \omega_{0i} = \frac{L_{0i}}{m_0}. \quad (3)$$

Согласно закону Ньютона, сила вязкого трения между слоями жидкости, приходящаяся

на единицу площади поверхности раздела слоев, находится как

$$f = -\eta \frac{dv_y}{dx}, \quad (4)$$

где η – динамическая вязкость жидкости; координатные оси x и y перпендикулярны друг другу, струя движется в направлении оси x .

Соответственно, момент вязкого трения между двумя слоями жидкости с площадью контакта dS относительно оси вращения вала МЖГ для осесимметричной задачи рассчитывается по формуле

$$dM = -\eta r^2 \frac{d\omega}{dr} dS. \quad (5)$$

При этом на каждую кольцевую струю, соответствующую k -му треугольному элементу конечно-элементной сетки, действует момент трения

$$M_k = -2\pi\eta r_k^3 \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{\Delta\omega_{ki}}{\Delta r_{ki}} l_{ki} \right), \quad (6)$$

где r_k – расстояние от центра тяжести k -го элемента до оси вращения вала; $\Delta\omega_{ki}$ – разность угловых скоростей k -й струи и струи, примыкающей к i -й стороне k -го треугольного элемента; Δr_{ki} – расстояние между центрами тяжести k -го элемента и элемента, примыкающего к i -й стороне k -го элемента; l_{ki} – длина i -й стороны k -го треугольного элемента.

Общий момент трения находится путем суммирования моментов трения всех струй.

Таким образом, задача расчета момента вязкого трения МЖГ решена в три этапа: определение положения магнитной жидкости на основе расчета магнитного поля методом конечных элементов; расчет распределения угловых скоростей элементарных струй методом Монте-Карло; и наконец, расчет моментов трения каждой элементарной струи на конечно-элементной сетке на основе конечно-разностной аппроксимации закона Ньютона для вязкого трения. Задача решена с учетом ряда допущений. Однако главная особенность метода Монте-Карло состоит в простоте модификации алгоритмов расчета. Перспектива развития метода Монте-Карло в плане решаемой задачи состоит в обосновании и программной реализации таких правил поведения частиц, которые смогут снять принятые допущения. Разрабатывается алгоритм, позволяющий распараллелить расчетный процесс в технологии CUDA.

Список литературы

1. Система расчета магнитоидкостного герметизатора с параметрически формируемой полевой моделью и определением критического положения магнитной жидкости / Ю.Я. Щелькалов, Ю.Б. Казаков, А.И. Тихонов, С.М. Перминов: сб. науч. тр. X Междунар. Плесской конф. по магнитным жидкостям. Плес. 9–12 сентября 2002. – Иваново, 2002. – С. 374–381.

References

1. Shchelykalov, Yu.Ya, Kazakov, Yu.B., Tikhonov, A.I., Perminov, S.M. Sistema rascheta magnitnozhidkostnogo germetizatora s parametricheski formiruemoj polevoj model'yu i opre-

deleniem kriticheskogo polozeniya magnitnoy zhidkosti [Calculation System of Magnetic Liquid Sealer with the Parameter – depended Field Model and Determination of Critical Position of Magnetic Liquid], in X *Mezhdunarodnaya konferentsiya po magnitnym zhidkostyam. Ples, Rossiya* [The Xth International Ples Conference on Magnetic Liquids], Ivanovo, 2002, pp. 374–381.

Тихонов Андрей Ильич,

ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой физики,
e-mail: ait@dsn.ru

Казakov Юрий Борисович,

ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой электромеханики,
e-mail: elmash@em.ispu.ru

Пирогов Константин Михайлович,

ФГБОУВПО «Ивановский государственный университет»,
доктор технических наук, профессор кафедры информационных технологий в экономике и организации производства,
e-mail: pirogov K.M.@.ru

Мартынов Александр Станиславович,

ФГБОУВПО «Ивановский государственный университет»,
магистрант,
e-mail: alexmart@mail.ru