© «Вестник ИГЭУ» Вып. 4 2010 г.

УДК 511.6

О развитии алгоритма Якоби-Перрона

Э.Т. Аванесов, В.А. Гусев, Н.П. Хариш, кандидаты физ.-мат. наук

Рассматривается аналог алгоритма Якоби-Перрона, называемый алгоритмом ближайшего целого, который позволяет эффективно решать задачу нахождения основных единиц алгебраических полей.

Ключевые слова: многомерные цепные дроби, алгоритм Якоби-Перрона, кубические поля.

On Development of The Jacobi-Perron Algorithm

E.T. Avanesov, N.P. Kharish, V.A. Gusev, Candidates of Physics and Mathematics

The authors consider an analogue of the Jacobi-Perron algorithm called the nearest integer algorithm which allows to solve the problem of calculating the basic units of algebraic fields.

Key words: cubic field, basic units, algorithm, periodic dissection.

В настоящее время проявляется интерес к цепным дробям и их многочисленным применениям.

Алгоритмы многомерных цепных дробей являются, в некотором смысле слова, обобщениями хорошо известного алгоритма Евклида. Применение этих алгоритмов в теории алгебраических полей позволяет решать задачи нахождения ОНД целых элементов поля и определения единиц.

В случае $n = 2$ известна теорема Лагранжа о периодичности разложения вещественных чисел в непрерывную дробь. Для кубических полей Якоби $[1]$ построил алгоритм как обобщение алгоритма Евклида. Работы Якоби продолжил Перрон, обобщивший результаты Якоби. Перрон $[2]$ изучил сходимость алгоритма, ввел понятие характеристического уравнения, исследовал вопрос о его приводимости, в том числе, при периодичности.

В большинстве работ по алгоритму Якоби-Перрона, его развитию и применениям рассматриваются чисто кубические поля. Известны $[3-5]$ следующие предложения:

Теорема 1. Не существует натуральных $m, m \neq a^3, a \in N$, таких, что алгоритм Якоби-Перрона для пары вещественных чисел $\left(\sqrt[3]{m}, \sqrt[3]{m^2}\right)$ чисто периодический.

Теорема 2. Для того, чтобы алгоритм Якоби-Перрона вещественных чисел $\left(\sqrt[3]{m}, \sqrt[3]{m^2}\right)$, $m \in N$, был периодическим с предпериодом длины 2 и периодом длины 1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение $m = D^3 + 1$.

Из этого следует, например, что основная единица чисто кубического поля $K\left(\sqrt[3]{m}\right)$, $m \neq 28$, будет $\varepsilon = -m + \sqrt[3]{m}$.

По аналогии исследованы и классы чисто кубических полей $K\left(\sqrt[3]{m}\right)$, $m = D^3 d^3 + D, D^3 \pm d, D^3 \pm 3d$, порождающие основную единицу вида $E = \dfrac{\sqrt[3]{m - D}}{m - D^3}$.

Теорема 3. Пусть a, k – ненулевые целые числа, a – нечетно, $m = a^2\left(a^2 k^3 - 1\right)\left(a^2 k^2 - 2\right)$. Тогда элемент $1 - 3k\left(a^2 k^3 - 1\right)\sqrt[3]{m} + 3k^2\sqrt[3]{m^2}$ – единица чисто кубического поля $K\left(\sqrt[3]{m}\right)$, а при $a < 1$, $k > 0$ эта единица будет основной.

Теорема 4. Пусть V – натуральное число, $m = \left(V^3 + 1\right)\left(V^3 + 2\right)$. Тогда $E = 1 - 3V\left(V^2 + 1\right)\sqrt[3]{m} + 3V^2\sqrt[3]{m^2}$ является основной единицей поля $K\left(\sqrt[3]{m}\right)$.

Очевидно, на таком пути можно получить основные единицы новых классов чисто кубических полей.

Развитием алгоритма Якоби-Перрона может служить его аналог, называемый алгоритмом ближайшего целого числа.

Пусть λ – вещественное число, по известной схеме строим непрерывную дробь, полагая

$$\varphi_0 = \lambda, q_0 = \{\varphi_0\};$$

$$\varphi_{i+1} = \frac{1}{\varphi_i - q_i}, q_{i+1} = \{\varphi_{i+1}\}, \quad i = 0,1,2,...,n;$$

где $\lambda = \{q_0, q_1, ..., q_{n-1}, \varphi_n\}$; символ $\{\alpha\}$ означает ближайшее целое число к числу α, т. е. такое целое число, что $\left|\alpha - \{\alpha\}\right| \leq 0{,}5$, и далее

$$\begin{cases} \overline{A}_{k+1} = q_{k+1} \cdot \overline{A}_k - \overline{A}_{k-1}, \\ \overline{B}_{k+1} = q_{k+1} \cdot \overline{B}_k - \overline{B}_{k-1}, \end{cases}$$

$$\overline{A}_{-2} = 0, \overline{A}_{-1} = 1, \overline{B}_{-2} = -1, \overline{B}_{-1} = 0; k = -1,0,1,2,...$$

Этот аналог алгоритма Якоби-Перрона, называемый алгоритмом ближайшего целого числа, применим и к чисто кубическим полям. Его достоинство – более быстрый по времени по сравнению с другими известными методами.

С помощью алгоритма Якоби-Перрона можно получить приближения вещественных чисел в виде подходящих дробей, числители и знаменатели которых выражаются рекуррентно линейной комбинацией соответственно числителей и знаменателей предшествующих подходящих дробей.

Приведем вычислительную процедуру, предлагающую целочисленное выполнение всех видов расчетов. Для чисто кубических полей она определена следующими формулами:

$$\begin{cases} F_{k+1} = (A_k^2 - C_k D_k \sqrt[3]{m}) Q_k^{-1}, \\ G_{k+1} = (D_k^2 \sqrt[3]{m} - A_k C_k) Q_k^{-1}, \\ H_{k+1} = (C_k^2 - A_k D_k) Q_k^{-1}, \\ B_{k+1} = (E_k F_{k+1} + G_k H_{k+1} \sqrt[3]{m} + H_k G_{k+1} \sqrt[3]{m^2}) Q_k^{-1}, \\ C_{k+1} = (E_k G_{k+1} + G_k F_{k+1} + H_k H_{k+1} \sqrt[3]{m}) Q_k^{-1}, \\ D_{k+1} = (E_k H_{k+1} + G_k G_{k+1} + H_k F_{k+1}) Q_k^{-1}, \\ Q_{k+1} = (A_k F_{k+1} + C_k H_{k+1} \sqrt[3]{m} + D_k G_{k+1} \sqrt[3]{m^2}) Q_k^{-1}, \end{cases}$$

где $A_k = B_k - \alpha_{k,1} Q_k$; $E_k = F_k - \alpha_{k,2} Q_k$ и далее

$$\{\alpha_{0,1}; \alpha_{0,2}\} = \left\{\sqrt[3]{m}, \sqrt[3]{m^2}\right\},$$

$$\alpha_{k,i} = \beta_{k,i} \gamma_k^{-1}, \ i = 1,2;$$

$$\begin{cases} \beta_{k+1,1} = \beta_{k,2} - \alpha_{k,2} \gamma_k, \\ \beta_{k+1,2} = \gamma_k; \end{cases}$$

$$\gamma_{k+1} = \beta_{k,1} - \alpha_{k,i} \gamma_k, \ Q_k = Norm \gamma_k,$$

$$Q_{k,1} = B_k + C_k \sqrt[3]{m} + D_k \sqrt[3]{m^2},$$

$$\Phi_{k,1} = A_k + C_k \sqrt[3]{m} + D_k \sqrt[3]{m^2},$$

$$Q_{k,2} = F_k + G_k \sqrt[3]{m} + D_k \sqrt[3]{m^2},$$

$$\Phi_{k,2} = E_k + G_k \sqrt[3]{m} + H_k \sqrt[3]{m^2}.$$

Пример. Если

$$m = 71, \ \alpha_{0,1} = \sqrt[3]{71}, \ \alpha_{0,2} = \sqrt[3]{71^2},$$

то алгоритм ближайшего целого числа приводит к следующему выводу: основная единица чисто кубического поля $K(\sqrt[3]{71})$ равна

$$\varepsilon = 1788355606552816482 +$$
$$+ 431884645684316172 \sqrt[3]{71} +$$
$$+ 1042993610976095425 \sqrt[3]{71^2}.$$

Алгоритм Якоби-Перрона оставляет открытым центральный вопрос теории – описание множества чисел с периодическим разложением. Применительно к кубическим полям существуют такие элементы α_1 *и* α_2, что их разложение по алгоритму Якоби-Перрона – периодическое, а элементы $\{1, \alpha_1, \alpha_2\}$ составляют базис поля.

Имеет место следующая основная теорема.

Теорема 5. Во всяком поле *K* порядка *n* + 1 существует бесчисленное множество линейно-независимых наборов $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ таких, что их разложение по алгоритму Якоби-Перрона чисто периодическое, и при этом элементы $1, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ составляют базис поля *K.*

Тем самым задается следующий алгоритм.

Пусть *K* – алгебраическое числовое поле порядка *n* + 1, где

$$f(x) = x^{n+1} - C_n x^n +$$
$$+ C_{n-1} x^{n-1} - ... + (-1)^n C_1 x + (-1)^{n+1} = 0$$

– характеристическое уравнение, далее $a_i \in Z, a_i \ge 0, a_n > \max(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$,

$$C_n = \binom{n+1}{1} + \sum_{k=1}^{n} a_k,$$
$$C_i = \binom{n+1}{1} + \sum_{k=1}^{i} \binom{n-1-k}{n-1-i} a_k; \quad i = 1,2,...,n-1. \qquad (*)$$

Разложение корня уравнения *f*(*x*) = 0 по алгоритму Якоби-Перрона чисто периодическое с длиной периода *n + 1*. Тем самым задается следующий алгоритм.

Шаг 1. Произвольным образом подбирается некоторая единица ε поля *K*.

Шаг 2. С помощью преобразования Чирнгаузена находится для ε минимальный многочлен, а значит, вычисляются коэффициенты $C_i (i = 1,2,...,n)$.

Шаг 3. Рассматривая (*) как треугольную систему уравнений, решаем ее относительно неизвестных $a_i (i = 1,2,...,n)$.

Шаг 4. Определяем базисные элементы $\alpha_i (i = 1,2,...,n)$.

Шаг 5. Выписываем искомое решение.

Список литературы

1. Jacobi C. Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welche jede Zahl aus drei vorhergeh enden gebildet wird // J. reine angew. Math. – 1868. – Т.9. – С. 29–64.

2. Perron O. Grundlagen fur eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus // Math. Annalen. – 1907. – Т.64. – С. 1–64.

3. Bouhamza M. Algorithme de Jacobi–Perron dans les corps de nombres de degree 3 // Bull.Sci.Math.(2 Serie). – 1964. – Т.108. – №1. – С. 101–111.

4. Bernstein L. The Jacobi–Perron algorithm: its Theory and Application. – Berlin: Springer Verlag, 1971. – С. 1–153.

5. Elsner L., Hasse H. Numerische Ergebnisse zum Jacobischen Kettenbruchalgorithmus in rein-kubischen Zahlkörpern // Math. Nachrichten. – 1967. – Т.34. – С. 95–97.

Аванесов Эдуард Тигранович,
Пятигорский государственный технологический университет,
кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики,

Гусев Владимир Алексеевич,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»
кандидат физико-математических наук, профессор,
зам. декана факультета информатики и вычислительной техники,
e-mail: dekan@ivtf.ispu.ru

Хариш Неллия Петровна,
Пятигорский государственный технологический университет,
кандидат физико-математических наук кафедры высшей математики,