© «Вестник ИГЭУ» Вып. 2 2009 г.

УДК 621.319.7.001.6

Стохастическая модель индукционной зарядки аэрозольных частиц

Семенов В.К., д-р техн. наук, Сорокин А.Ф., канд. техн. наук

Предлагается стохастическая математическая модель контактной зарядки аэрозольных частиц в аппаратах электронно-ионной технологии, основанная на уравнении Фоккера-Планка, позволяющая рассчитать не только средние заряды частиц, но их флуктуации.

Ключевые слова: индукционная зарядка, аэрозольная частица, электрод, электрическое поле.

Aerosol particle inductive charging operation probabilistic model

The probabilistic mathematical model of aerosol particles contact charging operation is suggested to be used in electron-ion technology operation. Based on formula of Foker-Planka, the model makes possible to calculate not only average particle charges, but also their fluctuations.

Keywords: induction charging operation, aerosol particle, electrode, electrical field.

Индукционная зарядка частиц используется во многих электротехнологических процессах – электросепарация, электропрядение, электроокраска, электроворсование и пр. Для удобства решения задачи допускаем, что частицы имеют форму полусферы или полуэллипсоида. При этом площадь контакта равна площади большого круга, а проводимость в месте контакта принимаем равной проводимости самой частицы. Однако оба эти предположения не соответствуют действительности: частицы имеют самую разнообразную форму, а переходное сопротивление в месте контакта частицы с электродом столь велико, что процесс зарядки частицы является квазистатическим, т.е. в каждый момент времени заряд, полученный частицей, распределяется по ней в соответствии с законами электростатики. Корректное решение задачи по расчету предельного заряда частицы приведено в [1]. Поскольку частицы могут иметь самую разнообразную форму, то довольно хорошей аппроксимацией их форм является эллипсоид вращения, изменением соотношения между полуосями которого можно изменять форму частицы в довольно широких пределах. В [1] показано, что заряд частицы, оторвавшейся от электрода, удовлетворяет следующему соотношению:

$$\frac{12+15k}{1+32k^2}a^2E_o \le q \le \frac{4+15k}{8+2k}a^2E_o, \qquad (1)$$

где a – большая полуось частицы; E_0 – напряженность внешнего поля; k – коэффициент формы, зависящий от соотношения полуосей эллипсоида a и b.

Для вытянутого вдоль поля эллипсоида имеем [2]

$$k = \frac{2}{3}\frac{e^3}{\ln\frac{1+e}{1-e} - 2e}, \quad e = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}. \qquad (2)$$

Для сплюснутого эллипсоида вращения с осью, перпендикулярной к вектору напряженности электрического поля, имеем

$$k = \frac{2e^3}{3\sqrt{1+e^2}\left[(1+e^2)arctge - e\right]}, \quad e = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}. \qquad (3)$$

Для определения зависимости заряда частицы от времени запишем уравнение кинетики зарядки

$$\frac{dNe}{dt} = E\sigma S, \qquad (4)$$

где E – напряженность электрического поля в месте контакта частицы с электродом; N – заряд частицы, измеряемый числом элементарных зарядов e; S – площадь контакта частицы с электродом; σ – электропроводность переходного сопротивления контакта.

После элементарных вычислений получим

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N_m}{\tau}\left(1-\frac{N}{N_m}\right), \qquad (5)$$

где $N_m = \frac{4\pi\varepsilon_o(4+15k)}{e(8+2k)}a^2E_o$ – предельный заряд частицы; $\tau = \frac{4\pi\varepsilon_o(4-k)}{(8+2k)\sigma S}$ – характерное время зарядки частицы.

Интегрируя последнее уравнение, находим закон накопления заряда частицы во времени:

$$N = N_m\left[1-\exp(-\frac{t}{\tau})\right]. \qquad (6)$$

Для электрофизических технологий представляет интерес не только величина зарядов, полученных частицами, но и флуктуации в процессе зарядки. В таком случае на процесс зарядки следует смотреть как на стохастический и исходить из вероятностных представлений. Поскольку величина заряда и время его приобретения в одном элементарном акте соответственно малы, по сравнению со средними значениями, определяющими макроскопический механизм процесса, стохастический процесс будет медленным. Для него вероятность данного состояния определяется только вероятностью предшествующего и не зависит от предыстории процесса. Процессы, удовлетворяющие названному условию, называются марковскими. Как известно, непрерывный марковский процесс подчиняется уравнению Фокера-Планка для функции распределения $f(N, t)$ [3]:

$$\frac{\partial f(N,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial N}\left[A(N)f(N,t)\right] + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[B(N)f(N,t)\right], \qquad (7)$$

где $A(N)$, $B(N)$ – кинетические коэффициенты, соответственно представляющие собой среднее и среднеквадратичное изменение заряда частицы за единицу времени:

$$A(N) = \int \omega(N,q)q\,dq, \quad B(N,q) = \frac{1}{2}\int \omega(N,q)q^2 dq. \qquad (8)$$

Коэффициенты $A(N)$ и $B(N)$ определяются вероятностью перехода $\omega(N,q)$, которая представляет собой средний поток зарядов на частицу, когда ее заряд фиксирован и равен N.

Для практики важно знать не сами функции распределения частиц по зарядам, а средние заряды и их флуктуации, которые можно найти методом моментов. Найдем уравнение для среднего заряда частицы $<N>$. С этой целью умножим левую и правую части уравнения Фоккера-Планка на N и проинтегрируем по всевозможным значениям заряда. После несложных преобразований получим

$$\frac{d<N>}{dt} = <A(N)>. \qquad (9)$$

Полученное уравнение имеет очевидный физический смысл: скорость изменения среднего заряда частицы определяется средним потоком элементарных зарядов. Однако чтобы им воспользоваться, нужно перейти от среднего потока к потоку от среднего заряда. Для этого разложим $A(N)$ в ряд Тейлора вблизи $<N>$:

$$A(N) \approx A(<N>) + A'(<N>)(N - <N>) + \\ + \frac{1}{2}A''(<N>)(N - <N>)^2.$$

Здесь штрихом обозначена производная по N.

Усредняя по N, получим

$$<A(N,)> = A(<N>) + \frac{1}{2}A''(<N>)\Delta. \qquad (10)$$

Так как зависимость $A(N)$ линейна, то второе слагаемое, содержащее дисперсию Δ, исчезает:

$$\frac{d<N>}{dt} = A(<N>) = \frac{N_m}{\tau}\left(1 - \frac{<N>}{N_m}\right). \qquad (11)$$

Именно это уравнение, совпадающее с (5), определяет кинетику зарядки частиц на детерминированном уровне описания.

Выведем теперь уравнение для дисперсии распределения:

$$\Delta = <(N - <N>)^2 = <N^2> - <N>^2. \qquad (12)$$

Из уравнения (11) имеем

$$\frac{d<N>^2}{dt} = 2<N>A(<N>). \qquad (13)$$

Умножая все члены уравнения (7) на N^2 и интегрируя по N с учетом (12) и (13), получим

$$\frac{d\Delta}{dt} = 2\left(<NA(N)> - <N><A(N)>\right) + 2B(<N>).$$

Раскладывая $NA(N)$ и усредняя по N, имеем

$$<NA(N)> \approx <N> A(<N>) + \frac{1}{2}\left[NA(N)\right]''_{N=<N>} \cdot \Delta. \qquad (14)$$

Подставляя это разложение в предыдущую формулу, получим уравнение для дисперсии функции распределения:

$$\frac{d\Delta}{dt} = 2A'(<N>)\cdot\Delta + 2B(<N>). \qquad (15)$$

Так как поток заряда $A(N)$ явно от времени не зависит, то вместо t введем новую переменную $<N>$, определяемую по уравнению (11):

$$\frac{d\Delta}{d<N>} = \Delta\frac{d}{d<N>}\left[\ln A^2(<N>\right] + 2\frac{B(<N>}{A(<N>)}. \qquad (16)$$

Полученное уравнение является линейным и интегрируется в квадратурах:

$$\Delta = 2A^2(<N>)\int_0^{<N>}\frac{B(<N>)}{A^3(<N>)}d<N>. \qquad (17)$$

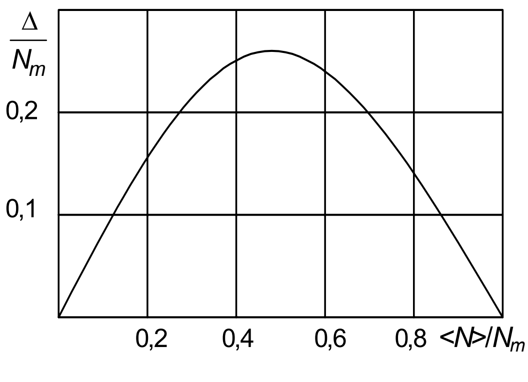
Подставляя сюда

$$A(<N>) = \frac{N_m}{\tau}\left(1 - \frac{<N>}{N_m}\right), \\ B(<N>) = \frac{1}{2}\frac{N_m}{\tau}\left(1 - \frac{<N>}{N_m}\right), \qquad (18)$$

после интегрирования получим

$$\Delta = <N>\left(1 - \frac{<N>}{N_m}\right). \qquad (19)$$

Максимума дисперсия достигает при $<N> / N_m = 1/2$, а дисперсия в максимуме – $\Delta = 0{,}25N_m$ (см. рисунок).



Зависимость дисперсии распределения от заряда частицы

Список литературы

1. **Волков В.Н.** К теории зарядки частиц на электродах // Новые методы исследования в теоретической электротехнике и инженерной электрофизике: Межвуз. сб. науч. тр. / Иван. энерг. ин-т им В.И. Ленина. – Иваново, 1974. – Вып. 3. – С. 67–71.

2. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982.

3. **Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.** Физическая кинетика. – М.: Наука, 1979.

Семенов Владимир Константинович,
Ивановский государственный энергетический университет,
доктор технических наук, профессор кафедры атомных электростанций,
телефон (4932) 38-57-78,
e-mail: npp@aes.ispu.ru

Сорокин Александр Федорович,
Ивановский государственный энергетический университет,
кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры электрических систем,
телефон (4932) 41-60-10
e-mail: deaneef@eef.ispu.ru